

## ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ

### 4.1 Задачи статики

Во всех программных комплексах семейства ЛИРА реализован метод конечных элементов (МКЭ) в форме перемещений – искомыми функциями являются перемещения. Этот вариант МКЭ наиболее легко поддается алгоритмизации и компьютерной реализации.

Уравнения равновесия для задач линейной теории упругости записываются в виде (здесь и в дальнейшем описание конечно-элементных процедур следует изложению, приведенному в работах [16.13]):

$$Au \equiv -B^T(DBu) + f = 0 \quad (4.1)$$

где:  $B$  – матричный линейный дифференциальный оператор, с помощью которого вектор деформаций  $\varepsilon(u)$  выражается через вектор перемещений  $u$ ,  $\varepsilon(u) = Bu$ ;

$D$  – матрица упругости, определяющая линейную связь между векторами напряжений  $\sigma$  и деформаций  $\varepsilon$ ,  $\sigma = D\varepsilon$  (закон Гука);

$B^T$  – транспонированная матрица.

Обозначим:

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (DBu)(Bu) d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(u)\varepsilon(u) d\Omega \text{ – потенциальная энергия деформации;}$$

$$W(u) = \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega \text{ – работа внешних сил;}$$

$$I(u) = P(u) + W(u) \text{ – полная энергия.} \quad (4.2)$$

Положительная определенность и самосопряженность дифференциального оператора  $A$  позволяют перейти от дифференциальных уравнений (4.1) к вариационной задаче нахождения минимума функционала полной энергии Лагранжа  $I(u)$ . Функция  $u$ , доставляющая минимум функционалу (4.2), является решением дифференциального уравнения (4.1). Условием минимума функционала (4.2) являются равенства принципа возможных перемещений: при любом возможном перемещении  $v$  сумма возможных работ внутренних и внешних сил равна нулю.

Обозначим:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (DBu)(Bv) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(u)\varepsilon(v) d\Omega \text{ – возможная работа внутренних сил;}$$

$$(f, v) = W(v) = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega \text{ – возможная работа внешних сил.}$$

Тогда принцип возможных перемещений запишем в виде:

$$a(u, v) + (f, v) = 0 \quad (4.3)$$

Левая часть равенства (4.3) является, как легко показать, производной функционала полной энергии (4.2). Задача решения уравнений равновесия (4.1) и вариационная задача минимизации функционала (4.2), то есть нахождения функции  $u$ , удовлетворяющей (4.3), эквивалентны и имеют одно и то же решение.

Вариационная постановка задачи имеет определенные преимущества, которые вытекают из того, что порядок производных в (4.2) понижается в 2 раза. Поэтому более удобно формулируются граничные условия, смягчаются требования к базисным функциям и упрощается представление разностных выражений.

Метод конечных элементов – вариационный, т.е. нахождение минимума функционала (4.2) производится на основе уравнений (4.3). Основная концепция МКЭ заключается в непосредственной дискретизации рассчитываемой системы, которая расчленяется расчетной сеткой на конечные элементы. Для полученной дискретной модели вводится система кусочно-непрерывных функций  $\{\varphi_l(x)\}$ , определенных на конечном числе подобластей – звездах конечных элементов (рисунок 4.1), т.е.

$$\varphi_l(x) = \begin{cases} \varphi_{lj}(x) & x \in \Omega_j \\ 0 & x \notin \Omega_j \end{cases}$$

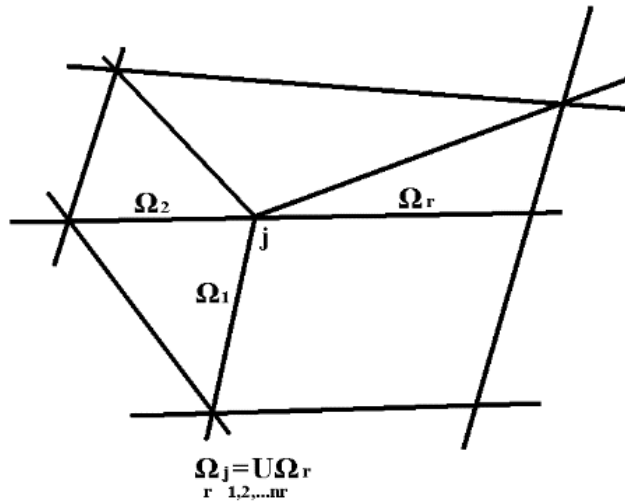


Рисунок 4.1 Звезды конечных элементов

Искомая функция перемещений по области системы  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$  приближенно принимается в виде:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^L q_l \varphi_l(x), \tag{4.4}$$

где  $L$  – общее число узловых неизвестных, которое в общем случае не равно числу узлов, так как в каждом узле может быть различное число неизвестных. Узловым неизвестным  $q_l$  в МКЭ, как правило, придается физический смысл и они представляют собой искомые значения перемещений и их производных в узлах расчетной сетки. При подстановке (4.4) в (4.3) задача определения непрерывной функции  $u(x)$  сводится к определению значений конечного числа неизвестных  $q_l$ , которые находят из системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_l} I(u_h) &= \frac{d}{dq_l} (\Pi(u_h) - W(u_h)) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{1}{2} a(u_h, u_h) - (f, u_h) \right) = \frac{\partial}{\partial q_l} \left( \frac{1}{2} a(\sum q_l \varphi_l, \sum q_l \varphi_l) - (f, \sum q_l \varphi_l) \right) = \\ &= a(u_h, \varphi_l) + (f, \varphi_l) = \sum_{j=1}^L q_j \int_{\Omega} DB \varphi_j B \varphi_l d\Omega + \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = 0 \end{aligned} \tag{4.5}$$

при  $l = 1, 2, \dots, L$ .

При этом предполагается, что  $u_h(x)$  удовлетворяет главным граничным условиям. По найденным из (4.5) значениям  $q_l$  на основе (4.4) определяется функция перемещений по области системы, а по ней на основе известных соотношений теории упругости и другие компоненты напряженно-деформированного состояния.

Обозначим:

$$k_{l,j} = \int_{\Omega} (DB \varphi_j) B \varphi_l d\Omega = a(\varphi_j, \varphi_l) \quad (4.6)$$

$$P_l = \int_{\Omega} f \varphi_l d\Omega = (f, \varphi_l)$$

Матрицу  $K$  с элементами  $K_{l,j}$  называют матрицей жесткости или матрицей системы уравнений МКЭ, вектор  $P$  с элементами  $P_l$  – вектором нагрузок или вектором правых частей. Обозначив  $q$  – вектор узловых неизвестных, запишем уравнения (4.5) в матричном виде:

$$Kq + P = 0 \quad (4.7)$$

Выполненное на первом этапе расчета расчленение системы на конечные элементы дает возможность представить возможные работы перемещений и внешних сил в виде сумм по отдельным элементам:

$$a(u, v) = \sum_r a_r(u, v), \quad (f, v) = \sum_r (f, v)_r.$$

Это позволяет составлять элементы матрицы  $K$  и вектора  $P$  из отдельных компонентов. Так,  $l_j$  (элемент матрицы  $K$ ) и  $l$  (элемент вектора  $P$ ) определяются по формулам:

$$K_{lj} = \sum_{r \in l_j} K_{l_j r} \quad \text{и} \quad P_l = \sum_{r \in l} P_{lr},$$

где:  $r \in l_j$ ,  $r \in l$  (у знака суммы) – суммирование по всем элементам, содержащим  $l$  и  $j$  узловые неизвестные;  $K_{l_j r}$ ,  $P_{lr}$  – компоненты матрицы жесткости и вектора узловых сил  $r$  конечного элемента, которые определяются аналогично (4.6):

$$K_{l_j r} = \int_{\Omega_r} (B \varphi_l)^T DB(\varphi_j) d\Omega_r, \quad (4.8)$$

$$P_{lr} = \int_{\Omega_r} \varphi_l^T f d\Omega_r. \quad (4.9)$$

Таким образом, МКЭ дает возможность строить разрешающую систему уравнений (4.5) на основе рассмотрения каждого отдельного конечного элемента, что очень удобно в реализации и является важным достоинством метода. После выбора системы базисных функций  $\{\varphi_l\}$  процедура МКЭ представляется достаточно формализованной. Выбор  $\{\varphi_l(x)\}$  – самый ответственный этап, так как он определяет сходимость метода, точность решения задачи, разрешимость системы (4.5). Принадлежность МКЭ к вариационным методам позволяет сформулировать требования к базисным функциям, обеспечивающим его сходимость:

- система базисных функций  $\{\varphi_l(x)\}$  должна принадлежать энергетическому пространству  $HA$  дифференциального оператора задачи  $A$ . Это означает, что наряду с удовлетворением главным граничным условиям, представление разрешающей функции  $u$  должно обеспечить существование по всей области  $\Omega$  тех перемещений и их производных, которые входят в функционал (4.2). Элементы, базисные функции которых удовлетворяют этому условию, называются совместными или конформными;
- функции  $\varphi_l$  должны быть линейно независимы. Это требование необходимо для разрешимости системы (4.5);

• система базисных функций  $\{\varphi_l\}$  должна быть полной в энергетическом пространстве оператора  $A$ . Это означает, что функции (4.4) при неограниченном сгущении сетки могут аппроксимировать в энергетическом смысле любые возможные перемещения по области  $\Omega$  с любой заранее заданной степенью точности.

Выполнение этих требований позволяет получить оценку погрешности перемещений и напряжений, полученных на основе МКЭ [16.13]:

$$\|u - u_h\|_{L_2} \leq c_u h^t \quad (4.10)$$

$$\|\sigma - \sigma_h\|_{L_2} \leq c_\sigma h^\tau \quad (4.11)$$

где:  $u, u_h(\sigma, \sigma_h)$  – точные и приближенные значения перемещений (напряжений);

$L_2$  – континуальный аналог квадратичной невязки;

$c_u, c_\sigma$  – константы;

$h$  – максимальный размер конечного элемента;

$t, \tau$  – порядок сходимости МКЭ по перемещениям и напряжениям.

Приведенные оценки (4.10), (4.11) имеют не только теоретическое значение, позволяющее судить о сходимости МКЭ: при сгущении сетки приближенное решение  $u_h$  стремится к точному  $u$ . Они оказываются полезными при практических расчетах, так как по ним можно составить представление о точном решении (подробно об этом сказано в [16.13]).

Систему уравнений (4.7) можно трактовать как уравнение равновесия. Аналогом ее в строительной механике стержневых систем является система канонических уравнений метода перемещений.


В МКЭ компоненты матрицы жесткости вычисляются, исходя из формул (4.6), (4.8), полученных из минимизации функционала Лагранжа. В строительной механике стержневых систем их находят как реакции от единичных перемещений. Если базисные функции удовлетворяют однородному уравнению равновесия, оба метода дают одинаковый результат.

Выражение (4.7) для получения компонентов вектора  $P$  в строительной механике стержневых систем трактуется как процедура приведения местной нагрузки к узловой.

Таким образом, процедура решения задачи по МКЭ полностью соответствует методам строительной механики стержневых систем. Некоторое отличие можно проследить только в процедуре составления матрицы жесткости: для МКЭ всегда используется формула (4.8), для стержневых систем матрица жесткости часто строится из других соображений.

Стержневые системы имеют следующую особенность: базисные функции для них всегда совместны. Если эти функции являются решениями однородных дифференциальных уравнений равновесия, то МКЭ для стержневых систем будет точным для дифференциальных уравнений вида

$$EF \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \text{ и } EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0.$$

 *Стержневые системы имеют одну особенность: гипотеза плоских сечений, лежащая в основе их расчета, с одной стороны, обуславливает совместность конечных элементов, с другой стороны, порождает дифференциальный оператор задачи. Поэтому здесь по-*

является возможность подобрать такие базисные функции, которые, с одной стороны, являются решением однородного дифференциального уравнения, с другой стороны, дают возможность построить совместные конечные элементы. В этом случае МКЭ для стержневых систем будет точным методом в смысле точного решения дифференциальных уравнений вида

$$EF \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = 0 \text{ и } EI \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = 0.$$

Вместе с тем, можно привести примеры, когда для стержневых систем лучше использовать приближенные базисные функции. К таким примерам относятся стержни с учетом сдвига, стержни на упругом основании, физически и геометрически нелинейные стержни и другие. Решению стержневых систем в этом случае присущи все отличительные особенности МКЭ: приближенное решение, оценка сходимости в виде (4.10, 4.11), необходимость дробления стержней по длине для повышения точности приближенного решения и т.п. Вот почему при описании библиотеки конечных элементов ПК ЛИРА для стержней указываются значения  $t$  и  $\tau$ . Теоретические основы МКЭ (процедурная часть, исследование сходимости, конструирование КЭ, исследование глубокой связи МКЭ и методов строительной механики) подробно описаны в [16.13].

Библиотека конечных элементов (БКЭ) ПК ЛИРА содержит элементы, моделирующие работу различных типов конструкций: элементы стержней, четырехугольные и треугольные элементы плоской задачи, плиты, оболочки, элементы пространственной задачи – тетраэдр, параллелепипед, трехгранная призма. Кроме того, в БКЭ имеются различные специальные элементы, моделирующие связь конечной жесткости, упругую податливость между узлами, элементы, задаваемые численной матрицей жесткости. Все конечные элементы, включенные в БКЭ, теоретически обоснованы, для них получены оценки погрешности по перемещениям и по напряжениям  $t$  и  $\tau$ . Теоретически обоснована также возможность задания криволинейных стержней прямолинейными элементами и произвольных оболочек треугольными и прямоугольными (для цилиндрических оболочек) элементами плоской оболочки. Погрешность по напряжениям и перемещениям оценивается здесь величиной, пропорциональной  $h$ . В БКЭ включены только такие элементы, для которых математически доказана сходимость, то есть получены  $t$  и  $\tau$ . Значения этих параметров позволяют не только обрести уверенность в результатах решения той или иной задачи, но и оценить степень приближения полученного решения к точному [16.13].

### Решение системы канонических уравнений

После того как заданная конструкция представлена в виде конечно–элементной схемы, задача об определении перемещений узлов сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений вида

$$AX = B \tag{4.12}$$

где:  $A$  – симметричная положительно определенная матрица размером  $N \times N$  ;

$B$  – матрица правых частей (загружений) размером  $N \times k$  ( $k$  – количество загружений);

$X$  – искомая матрица перемещений размером  $k \times N$  .

Поскольку в большинстве случаев матрица  $A$  является разреженной, то для уменьшения требуемой оперативной памяти, внешней памяти и времени счета предварительно произво-

дится упорядочивание неизвестных системы (4.12) с целью минимизации количества перемещений при разложении. Реализованы следующие методы упорядочивания: алгоритм минимальной степени и многоуровневый алгоритм декомпозиции. Пользователю предоставлена возможность выбора метода упорядочивания. По умолчанию выполняется упорядочивание обеими методами с выбором лучшего. Конкретные рекомендации для выбора метода упорядочивания не могут быть даны, так как эффективность того или иного алгоритма существенно зависит от структуры конкретной матрицы  $A$ . Методы снижения влияния плохой обусловленности матрицы обсуждаются в работе [16.13]. Для решения системы (4.12) предварительно производится треугольное разложение матрицы  $A$ . Алгоритм решения разреженных матриц, реализованный в ПК ЛИРА, основывается на алгоритме Даффа и представляет собой метод Гаусса с такой нумерацией неизвестных, которая позволяет минимизировать количество вычислений, то есть, уменьшить количество элементов матрицы, заполняемых в процессе исключения.

Если в процессе треугольного разложения матрицы  $A$  выясняется, что  $A$  вырождена, то производится автоматическое наложение связей, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость. При этом пользователю предоставляется информация о номерах узлов и номерах степеней свободы, по которым произведено наложение связей. В этом случае рекомендуется внимательно проанализировать расчетную схему и выяснить происхождение геометрической изменяемости конструкции.

Дополнительным сервисным средством является контроль решения системы (4.12). При появлении сообщения о большой величине ошибки решения, которое, как правило, является следствием плохой обусловленности матрицы  $A$ , следует внимательно проанализировать величины перемещений узлов и убедиться в том, что полученное решение является приемлемым с инженерной точки зрения.

## 4.2 Задачи динамики

Задача динамического расчета формулируется, как и в статическом случае, в виде вариационного равенства

$$b\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, v\right) + c\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u, v) = (f(t), v), \quad t > 0, \tag{4.13}$$

$$u(0) = u_0, \quad \partial u / \partial t(0) = u_1,$$

где:  $u_i = u(t)$  – точное решение;

$b(u, v)$ ,  $c(u, v)$  – возможные работы инерционных и демпфирующих сил;

$u_0$ ,  $u_1$  – начальные значения перемещения и скорости;

остальные обозначения те же, что и в статической задаче.

Реализован метод решения динамической задачи, заключающийся в сочетании МКЭ с разложением по формам собственных колебаний. Решение системы уравнений (4.12) ищем в виде

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_i(t) \mu_i, \tag{4.14}$$

где  $u_i = u(t)$  – скалярные функции;

$\mu_i$  – базисные функции соответствующей статической задачи.

Подставив в (4.13)  $U_h$  вида (4.14) вместо  $U$  и  $\mu_j$  ( $j=1, \dots, N$ ) вместо  $V$ , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + C \frac{dx(t)}{dt} + Kx(t) = P(t), \quad (4.15)$$

где:  $x(t)$ ,  $x_0$ ,  $x_1$  – векторы с элементами  $X_1(t) = u_i(t)$ ,  $X_1(0) = L_i U_0$ ,  $X_1(1) = L_i U_1$ ;

$M$  и  $C$  – матрицы масс и демпфирования с элементами  $m_{i,j} = b(\mu_i, \mu_j)$ ,  $c_{i,j} = c(\mu_i, \mu_j)$ .

Кроме диагональной матрицы масс может использоваться и согласованная матрица масс, элементы которой вычисляются на основании базисных функции МКЭ.

Матрица жесткости  $K$  и вектор нагрузок  $P(t)$  определяются, как для статической задачи. Этот метод известен как полудискретная аппроксимация. Его погрешность (разность между  $U$  и  $U_h$ ) по потенциальной и кинетической энергии оценивается как в совместном, так и в несовместном случаях величиной, пропорциональной  $h_\tau$ .

Систему (4.15) решаем методом разложения по формам собственных колебаний. Пусть  $\lambda_i, \varphi_i < M$ ,  $\varphi_i, \varphi_i \geq 1$  решение задачи на собственные значения

$$K = \lambda M \varphi \quad (4.16)$$

 Символом « $\langle, \rangle$ » обозначается скалярное произведение в  $R^N$ .

Задача на собственные значения (4.16) решается методом итерации подпространств.

Полагая в (4.16)  $x(t) = \sum_{i=0}^N y_i(t) \varphi_i$  из ортогональности функций  $\varphi_i$  получим (при определенных предположениях относительно матрицы  $C$ ), что система (4.16) распадается на независимые уравнения относительно  $y_i(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} y_i(t) + 2\xi_i \omega_i \frac{d}{dt} y_i(t) + \omega_i^2 y_i(t) &= P_i(t), \quad t > 0, \\ y_i(0) = y_i^0, \frac{dy_i}{dt}(0) &= y_i^1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

где:  $\omega = \lambda_i^{-0.5}$ ,  $0 < \xi_i < 1$ ,  $P_i(t) = \langle P(t), \varphi_i \rangle$ ,  $y_i^0 = \langle x^0, M \varphi_i \rangle$ ,  $y_i^1 = \langle x^1, M \varphi_i \rangle$

Решение уравнения (4.5) имеет вид:

$$y_i = e^{-\xi_i \omega_i t} \left( \frac{y_i^1 + y_i^0 \xi_i \omega_i}{\omega_i} \sin \varpi_i t + y_i^0 \cos \varpi_i t \right) + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t P_i(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin \varpi_i (t-\tau) d\tau,$$

где:  $\varpi_i = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2}$ .

Векторы инерционных сил  $S_i(t)$  вычисляются по формуле  $S_i(t) = \omega_i^2 y_i^{(t)} M \varphi_i$ .

В расчетах используются величины, выражаемые формулой  $S_{i,0} = \max_i \{ \omega_i^2 y_i(t) \}$ . При этом:

1. Для ветровой нагрузки

$$S_{i,0} = w_n \gamma_i,$$

где:  $w_n$  – нормативное значение ветровой нагрузки;

$\gamma_i$  – коэффициент динамичности, зависящий от  $\omega_i$ ,  $\xi_i$  и скорости ветра.

2. Для сейсмической нагрузки

$$S_{i,0} = A\beta_i,$$

где:  $A$  – относительная величина ускорения;

$\beta_i$  – коэффициент динамичности, зависящий от  $\omega_i$  и  $\xi_i$ .

3. Для импульсивной и ударной нагрузок  $\left(t_0 \leq 2.5 \frac{2\pi}{\omega_i}\right)$

$$S_{i,0} = \varepsilon_i \bar{P}_i \psi,$$

где:  $\varepsilon_i$ , зависит от  $t_0$ ,  $\omega_i$ ;

$t_0$  – время действия импульса;

$\psi$  – учитывает периодичность действия нагрузки;

$$\bar{P}_i = \begin{cases} \int_0^{t_0} P_i(\tau) d\tau - \text{для импульса,} \\ M_0 v_0 (1 + \nu) - \text{для удара;} \end{cases}$$

где:  $m_0$ ,  $v_0$  – масса и скорость ударяющего тела;

$\nu$  – коэффициент восстановления формы соударяющихся тел.

Коэффициент  $\psi$  зависит от того, являются ли колебания установившимися  $\left(n > \frac{\pi}{4\xi_1}\right)$  или не-

установившимися  $\left(n < \frac{\pi}{4\xi_1}\right)$ , где  $n$  – число повторений импульсов.

4. Для гармонической нагрузки  $P_{i,1} \cos \theta t + P_{i,2} \sin \theta t$  вычисляются суммарные по всем формам инерционные силы  $S_1$  и  $S_2$ , соответствующие косинусоидальной (действительной) и синусоидальной (мнимой) составляющим:

$$S_1 = \sum_i a_i M \varphi_i, S_2 = \sum_i b_i M \varphi_i,$$

$$\text{где: } a_i = \frac{P_{i,1}\chi_i - P_{i,2}\xi_i\alpha_i}{\chi_i^2 + \alpha_i^2\xi_i^2}, \quad b_i = \frac{P_{i,2}\chi_i + P_{i,1}\xi_i\alpha_i}{\chi_i^2 + \alpha_i^2\xi_i^2}, \quad \alpha_i = \frac{\theta}{\omega_i}, \chi_i = 1 - \alpha_i^2.$$

$$\text{Тогда } \max \sum_i S_i(t) = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}.$$

В перечисленных выше вариантах воздействий возможно точное вычисление  $Y_1(t)$ . В остальных случаях решения  $Y_1(t)$  находим численно.

В частности, при расчете на сейсмическую нагрузку по акселерограмме в каждый момент времени  $t_k$  задается вектор  $P_k = P(t_k)$ . Тогда в (4.17) имеем  $P_{i,k} = P_i(t_k)$ . Далее уравнения (4.17) решаются методом конечных разностей по схеме Ньюмарка. Получаем значения перемещений  $Y_{i,k} = Y_i(t_k)$  и инерционных сил  $S_{i,k} = S_i(t_k)$ , по которым вычисляется

$$S_{i,0} = \max_k \left\{ \omega_i^2 y_i(t_k) \right\}$$

При расчетах на сейсмические воздействия ПК ЛИРА позволяет применить метод спектра от-  
ветов. Расчет заключается в том, чтобы при заданной функции  $S_0(\omega_i)$ , обычно кусочно–ли-  
нейной, вычислить линейной интерполяцией значения  $S_0(\omega_i)$ . Функция  $S_0(\omega_i)$  может быть  
представлена графиками спектров ускорений, скоростей или перемещений.



Реализованы следующие модули расчета на динамические воздействия:

- (27) Сейсмическое воздействие по однокомпонентной акселерограмме;
- (29) Сейсмическое воздействие по трехкомпонентной акселерограмме;
- (30) Сейсмическое воздействия по СНиП II-7-81\* издания 01.01.1996 г.;
- (31) Сейсмическое воздействие по СП 31-114-2004 (Российская Федерация);
- (32) Сейсмическое воздействие по СНРА II-6.02-2006 (Республика Армения);
- (33) Сейсмическое воздействие по КМК 2.01.03-96 с учетом изменений от 01.04.2004 (Узбекистан);
- (34) Сейсмическое воздействие по МГСН 4.19-05 (ГСН г. Москва);
- (35) Сейсмическое воздействие по СНиП II-7-81 \* издания 01.01.2000 г. (Российская Федерация);
- (36) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014 (Украина);
- (37) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014, прил. Б (Украина);
- (38) Сейсмическое воздействие по СНиП II-7-81\* издания 01.01.2000г. с учетом кручения (Российская Федерация);
- (39) Сейсмическое воздействие по TGN 2.01.08-99 (Туркменистан);
- (41) Сейсмическое воздействие по спектру реакции одномассового осциллятора;
- (42) Сейсмическое воздействие по IBC-2006 (США);
- (43) Сейсмическое воздействие по СНиП РК 2.03-30 – 2006;
- (44) Сейсмическое воздействие по EN 1998-1: 2004;
- (45) Сейсмическое воздействие по RPA 99 / Version 2003 (Алжир);
- (46) Сейсмическое воздействие по ДБН В.1.1-12:2014, прил. Г (Украина);
- (47) Сейсмическое воздействие по НП-031-01 (Российская Федерация);
- (48) Сейсмическое воздействие по МСК ЧТ 22-07-2007 (Таджикистан);
- (49) Сейсмическое воздействие по ДБН В.2.2-24:2009 (Украина);
- (50) Сейсмическое воздействие по AzDTN 2.3-2010 (Азербайджан);
- (51) Сейсмическое воздействие по СП 14.13330.2011 издания 20.05.2011г.;
- (52) Сейсмическое воздействие по Turkish Earthquake Code 2007 (Турция);
- (53) Сейсмическое воздействие по PN 01.01-09 (Грузия);
- (54) Сейсмическое воздействие по IS 1893 (Part 1) : 2002[2007] (Индия);
- (55) Сейсмическое воздействие по СТО МГСУ (Российская Федерация);
- (56) Сейсмическое воздействие по SI 413 Am.3 от 09.2009 (Израиль);
- (60) Сейсмическое воздействия по трехкомпонентным графикам коэффициента динамичности;
- (21) Ветровое воздействие с учетом пульсации по СНиП 2.01.07–85\*;
- (25) Ветровое воздействие с учетом пульсации по СП 20.13330.2011;
- (22) Импульсивное воздействие;
- (23) Ударное воздействие;
- (24) Гармонические колебания;
- (28) Гармонические колебания с учетом частотных зон;
- (100) Модальный анализ.

### 4.2.1 Конденсация масс

Для конструкций с сильно отличающимися жесткостными характеристиками (металлические надстройки над ж/б зданиями, довольно податливые перекрытия и т. д.) реализован механизм конденсации масс. При конденсации масс указываются элементы, с которых необходимо собрать массу, и узлы, в которые собранную массу необходимо распределить. Конденсация масс позволяет избавиться от форм собственных колебаний с близким к нулю процентом вклада в реакцию сооружения.

### 4.2.2 Спектр реакции

При необходимости выполнить сейсмический расчет установленного в здании оборудования используются так называемые поэтажные акселерограммы и поэтажные спектры отклика. После расчета здания или сооружения на сейсмическое воздействие для точек прикрепления оборудования получают законы колебаний – обычно акселерограммы. Их можно непосредственно использовать для расчета оборудования методом прямого интегрирования или по модулям расчета на акселерограммы землетрясений. Если же необходим расчет по спектральной теории сейсмостойкости, то вычисляют поэтажные спектры отклика от поэтажных акселерограмм с дальнейшей возможностью использования полученных спектров отклика в 41 модуле динамики. Поэтажные спектры отклика строятся для 27 и 29 модулей динамики и для прямого интегрирования уравнений движения.

## 4.3 Задачи устойчивости

Задачи устойчивости тесно связаны с геометрически нелинейными задачами. При применении шагового метода устойчивость конструкции обозначает положительную определенность матрицы линеаризованной системы уравнений. Условием положительной определенности симметричной матрицы, согласно критерию Сильвестра, является положительность всех ее главных миноров, что проверяется в ходе исключения неизвестных методом Гаусса [4.1]. Такой подход позволяет исследовать устойчивость и при одновременном учете геометрической и физической нелинейностей. Изложенный метод исследования устойчивости называют устойчивостью деформированной схемы.

Для многих задач достаточно исследовать устойчивость недеформированной схемы. В ПК ЛИРА имеется возможность оценки устойчивости конструкции в предположении ее упругой работы. Основной задачей расчета на устойчивость является определение значения критического параметра потери устойчивости конструкции –  $\lambda$  (физический смысл критического параметра потери устойчивости состоит в том, что если увеличить нагрузки, действующие на конструкцию в  $\lambda$  раз, то система потеряет устойчивость).

Реализованный в ПК ЛИРА вариант оценки устойчивости конструкции предполагает, что распределение внутренних усилий/напряжений  $\sigma_0$  известно из решения линейной статической задачи и все приложенные к системе внешние силы  $F_0$  (а следовательно, и внутренние усилия/напряжения) растут пропорционально одному и тому же параметру  $\lambda$ . Требуется определить такое значение числового параметра  $\lambda$ , чтобы при внешних силах  $(\lambda \cdot F_0)$  произошла потеря устойчивости.

Задача определения критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости допускает следующую вариационную формулировку. Найти перемещения  $u \neq 0$  и число  $\lambda$ , такие, чтобы при всех допустимых перемещениях  $v$  было справедливо равенство

$$a(u, v) = \lambda \cdot d(u, v), \quad (4.18)$$

где:  $d(u, v)$  – возможная работа усилий/напряжений при заданном их распределении  $\sigma_0$ .

Возможная работа  $d(u, v)$  может учитывать не только усилия растяжения-сжатия, но и остальные компоненты напряженно-деформированного состояния (моменты, перерезывающие силы) [4.2].

Обозначив  $D$  матрицу с элементами  $d_{i,j} = d(\mu_i, \mu_j)$ , получим из (4.18) задачу на собственные значения для пучка матриц

$$KX = \lambda DX, \quad (4.19)$$

где:

$K$  – матрица жесткости расчетной схемы;

$X$  – собственные вектора (в данном случае формы потери устойчивости).

Погрешность МКЭ в задаче устойчивости для критических сил и соответствующих им форм потери устойчивости пропорциональна  $h^T$ .

Для решения общей устойчивости применяется метод итерации подпространств (QR-метод), аналогичный методу вычисления частот и форм собственных колебаний в задачах динамики. Этот метод позволяет определить не только первую, но и высшие формы потери устойчивости и соответствующую им критическую нагрузку. В данной версии допускается не более десяти форм.

По желанию пользователя могут быть выполнены два варианта расчета:

- классический расчет устойчивости по Эйлеру, когда при составлении матрицы  $D$  учитываются только продольные усилия в стержнях и мембранные усилия в оболочках;
- расчет устойчивости с учетом изгибно-крутильных форм, когда при составлении матрицы  $D$  учитываются все усилия.

Расчет реализуется в упругой стадии. Значения усилий в элементах схемы уже вычислены с помощью линейного процессора. При выполнении расчета на устойчивость предполагается, что эти значения выражены через критический параметр нагрузки:

$$P_{кр,i} = \lambda_i \cdot P_i, \quad N_{кр,ij} = \lambda_i \cdot N_{ij}, \quad (4.20)$$

где:

$i$  – номер загрузки;

$j$  – номер элемента в схеме;

$P_i$  – суммарная нагрузка в  $i$ -том загрузении;

$P_{кр,i}$  – критическая нагрузка в  $i$ -том загрузении;

$N_{ij}$  – усилия в  $j$ -том элементе в  $i$ -том загрузении;

$N_{кр,ij}$  – критические усилия в  $j$ -том элементе в  $i$ -том загрузении;

$\lambda_i$  – параметр нагрузки (коэффициент запаса устойчивости).

В процессе расчета для каждого нагружения определяются первые несколько форм потери устойчивости и соответствующие им коэффициенты запаса устойчивости. В ПК ЛИРА анализ устойчивости можно выполнить для:

- статического нагружения;
- расчетного сочетания нагрузок (без вхождения динамических нагружений);
- стадии возведения сооружения.

В результате вычисляются коэффициенты запаса устойчивости  $\lambda_i$ , первые формы потери устойчивости и коэффициенты свободной длины для стержневых элементов, исходя из общей устойчивости, по следующим формулам:

$$\mu_{y,ij} = \frac{\pi}{l_j} \cdot \sqrt{\frac{EJ_{y,j}}{N_{кр,ij}}}, \quad \mu_{z,ij} = \frac{\pi}{l_j} \cdot \sqrt{\frac{EJ_{z,j}}{N_{кр,ij}}}, \quad (4.21)$$

где:

$\mu_{y,ij}$ ,  $\mu_{z,ij}$  – коэффициенты свободной длины  $j$ -того стержня соответственно в плоскостях X1oZ1, X1oY1 для  $i$ -того нагружения;

$EJ_{y,j}$ ,  $EJ_{z,j}$  – изгибные жесткости  $j$ -того стержня в плоскостях соответственно X1oZ1, X1oY1;

$N_{кр,ij} = \lambda_i \cdot N_{ij}$  – критическое продольное усилие сжатия в  $j$ -том стержне для  $i$ -того нагружения;

$\lambda_i$  – коэффициент запаса устойчивости для  $i$ -того нагружения;

$l_j$  – длина  $j$ -того стержня.